Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
CIC 117366 Lógica Computacional 1 - Turmas A e B **(2019/2)**

17 de setembro de 2019

Lista: Lógica Proposicional - Dedução Natural (Gabarito)

Em adição aos exercícios que aparecem nas notas de aula, solucione os listados a seguir. Nas sua derivações, sempre indique qual regra dedutiva é utilizada em cada passo.

1. Considere a estrutura de listas de números naturais dada por:

$$l ::= nil \mid cons(n, l)$$

onde nil representa a lista vazia, e $cons(n, l)$ denota a lista com cabeça n e cauda l.

O comprimento de uma lista é definido recursivamente por:

$$length(l) = \begin{cases} 0, & \text{se } l = nil \\ 1 + length(l'), & \text{se } l = cons(a, l') \end{cases}$$

A concatenação de listas também pode ser definida por uma função recursiva:

$$concat(l_1, l_2) = \begin{cases} l_2, & \text{se } l_1 = nil \\ cons(a, concat(l', l_2)), & \text{se } l_1 = cons(a, l') \end{cases}$$

O reverso de listas é definido por:

$$rev(l) = \begin{cases} l, & \text{se } l = nil \\ concat(rev(l'), cons(a, nil)), & \text{se } l = cons(a, l') \end{cases}$$

O uma lista é prefixo de outra se:

$$prefix(l_1, l_2) = \begin{cases} True, & \text{se } l_1 = nil \\ prefix(l_1', l_2'), & \text{se } l_1 = cons(a, l_1') \text{ e } l_2 = cons(a, l_2') \\ False & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Prove que $length(concat(l_1, l_2)) = length(l_1) + length(l_2)$, para l_1, l_2 quaisquer.

Solução

Indução sobre l_1

Base indutiva:

$$\begin{aligned} length(concat(nil, l_2)) &= length(l_2) \\ &= length(nil) + length(l_2) \end{aligned}$$

Passo indutivo: Nossa hipótese de indução é:

$$length(concat(l_1, l_2)) = length(l_1) + length(l_2)$$

E queremos provar que:

$$length(concat(cons(a, l_1), l_2)) = length(cons(a, l_1)) + length(l_2)$$

Logo,

$$\begin{aligned} length(concat(cons(a, l_1), l_2)) &= length(cons(a, concat(l_1, l_2))) \\ &= 1 + length(concat(l_1, l_2)) \\ &\overset{h.i.}{=} 1 + length(l_1) + length(l_2) \\ &= length(cons(a, l_1)) + length(l_2) \end{aligned}$$

(b) Prove que $concat(l, nil) = l$ para qualquer lista l

Solução
Indução sobre l
Base indutiva:

$$concat(nil, nil) = nil$$

Passo indutivo: Nossa hipótese de indução é:

$$concat(l, nil) = l$$

E queremos provar que:

$$concat(cons(a, l), nil) = cons(a, l)$$

Logo,

$$\begin{aligned} concat(cons(a, l), nil) &= cons(a, concat(l, nil)) \\ &\overset{h.i.}{=} cons(a, l) \end{aligned}$$

(c) Prove que $concat(concat(l_1, l_2), l_3) = concat(l_1, concat(l_2, l_3))$ para listas l_1, l_2, l_3 quaisquer

Solução
Indução sobre l_1
Base indutiva:

$$\begin{aligned} concat(concat(nil, l_2), l_3) &= concat(l_2, l_3) \\ &= concat(nil, concat(l_2, l_3)) \end{aligned}$$

Passo indutivo: Nossa hipótese de indução é:

$$concat(concat(l_1, l_2), l_3) = concat(l_1, concat(l_2, l_3))$$

E queremos provar que:

$$concat(concat(cons(a, l_1), l_2), l_3) = concat(cons(a, l_1), concat(l_2, l_3))$$

Logo,

$$\begin{aligned} concat(concat(cons(a, l_1), l_2), l_3) &= concat(cons(a, concat(l_1, l_2)), l_3) \\ &= cons(a, concat(concat(l_1, l_2), l_3)) \\ &\overset{h.i.}{=} cons(a, concat(l_1, concat(l_2, l_3))) \\ &= concat(cons(a, l_1), concat(l_2, l_3)) \end{aligned}$$

(d) Prove que $length(rev(l)) = length(l)$, para qualquer lista l.

Solução
Indução sobre l.
Base indutiva:

$$length(rev(nil)) = length(nil) = 0$$

Passo indutivo: Nossa hipótese de indução é:

$$length(rev(l)) = length(l)$$

e queremos provar que

$$length(rev(cons(a, l))) = length(cons(a, l))$$

Logo,

$$\begin{aligned} length(rev(cons(a, l))) &= length(concat(rev(l), cons(a, nil))) \\ &= length(rev(l)) + length(cons(a, nil)) \\ &\overset{h.i.}{=} length(l) + length(cons(a, nil)) \\ &= length(l) + 1 \\ &= length(cons(a, l)) \end{aligned}$$

(e) Prove que $rev(concat(l_1, l_2)) = concat(rev(l_2), rev(l_1))$ para listas l_1, l_2 quaisquer.

Solução

Indução sobre l_1
Base indutiva:

$$\begin{aligned} rev(concat(nil, l_2)) &= rev(l_2) \\ &= concat(rev(l_2), nil) \\ &= concat(rev(l_2), rev(nil)) \end{aligned}$$

Passo indutivo: Nossa hipótese de indução é:

$$rev(concat(l_1, l_2)) = concat(rev(l_2), rev(l_1))$$

E queremos provar que:

$$rev(concat(cons(a, l_1), l_2)) = concat(rev(l_2), rev(cons(a, l_1)))$$

Logo,

$$\begin{aligned} rev(concat(cons(a, l_1), l_2)) &= rev(cons(a, concat(l_1, l_2))) \\ &= concat(rev(concat(l_1, l_2)), cons(a, nil)) \\ &\overset{h.i.}{=} concat(concat(rev(l_2), rev(l_1)), cons(a, nil)) \\ &= concat(rev(l_2), concat(rev(l_1), cons(a, nil))) \\ &= concat(rev(l_2), rev(cons(a, l_1))) \end{aligned}$$

(f) Prove que $rev(rev(l)) = l$ para qualquer lista l.

Solução
Indução sobre l
Base indutiva:

$$\begin{aligned} rev(rev(nil)) &= rev(nil) \\ &= nil \end{aligned}$$

Passo indutivo: Nossa hipótese de indução é:

$$rev(rev(l)) = l$$

E queremos provar que:

$$rev(rev(cons(a, l))) = cons(a, l)$$

Logo,

$$\begin{aligned} rev(rev(cons(a, l))) &= rev(concat(rev(l), cons(a, nil))) \\ &= concat(rev(cons(a, nil)), rev(rev(l))) \\ &= concat(cons(a, nil), rev(rev(l))) \\ &\overset{h.i.}{=} concat(cons(a, nil), l) \\ &= cons(a, concat(nil, l)) \\ &= cons(a, l) \end{aligned}$$

(g) Prove que $prefix(l_1, l_2)$ se e só se existe l_3 tal que $concat(l_1, l_3) = l_2$ para quaisquer l_1 e l_2.

Solução

Indução sobre l_1

Base indutiva:

$$prefix(nil, l_2) \text{ sse existe } l_3 \text{ tal que } concat(nil, l_3) = l_2$$
$$\text{Basta que } l_3 = l_2$$

Passo indutivo: Nossa hipótese de indução é:

$$prefix(l_1, l_2) \text{ sse } existe l_3 \text{ tal que } concat(l_1, l_3) = l_2$$

E queremos provar que:

$$prefix(cons(a, l_1), cons(a, l_2)) \text{ sse existe } l_3' \text{ tal que } concat(cons(a, l_1), l_3') = cons(a, l_2)$$

Simplificando $prefix$ tem-se:

$$prefix(l_1, l_2) \text{ sse existe } l_3' \text{ tal que } concat(cons(a, l_1), l_3') = cons(a, l_2)$$

Simplificando $concat$:

$$prefix(l_1, l_2) \text{ sse existe } l_3' \text{ tal que } cons(a, concat(l_1, l_3')) = cons(a, l_2)$$

Por hipótese de indução e por $prefix(l_1, l_2)$ existe l_3 tal que $concat(l_1, l_3) = l_2$. Assim basta fazer $l_3' = l_3$:

$$prefix(l_1, l_2) \text{ sse existe } l_3 \text{ tal que } cons(a, concat(l_1, l_3)) = cons(a, l_2)$$

2. Nos seguintes exercícios use a prova por indução na estrutura das fórmulas.

(a) Demonstre que uma fórmula bem formada é balanceada, no sentido de que o número de parênteses abertos "("é igual ao de parênteses fechados ")", isto é, $|\varphi|_(= |\varphi|_)$, para uma fórmula φ qualquer.

Solução A prova é por indução em φ. Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

BI Se φ for uma constante ou variável proposicional, então a propriedade vale, uma vez que neste caso φ não possui parênteses.

PI.a Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então por hipótese de indução $|\varphi_1|_(= |\varphi_1|_)$ e $|\varphi_2|_(= |\varphi_2|_)$, logo $|\varphi|_(= |(\varphi_1 \star \varphi_2)|_(= 1 + |\varphi_1|_(+ |\varphi_2|_(\stackrel{h.i.}{=} 1 + |\varphi_1|_) + |\varphi_2|_) = |(\varphi_1 \star \varphi_2)|_) = |\varphi|_)$.

PI.b Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então por hipótese de indução $|\varphi_1|_(= |\varphi_1|_)$, logo $|\varphi|_(= |(\neg\varphi_1)|_(= 1 + |\varphi_1|_(\stackrel{h.i.}{=} 1 + |\varphi_1|_) = |(\neg\varphi_1)|_) = |\varphi|_)$.

(b) Demonstre que para todo prefixo s de uma fórmula bem formada φ, vale $|s|_(\geq |s|_)$.

Solução A prova é por indução em φ. Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

BI Se φ for uma constante ou variável proposicional, então os possíveis prefixos de φ são a palavra vazia ou φ. Em ambos os casos, temos que $|s|_(= 0 = |s|_)$, e portanto $|s|_(\geq |s|_)$.

PI.a Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então, por hipótese de indução, para qualquer prefixo s' de φ_1 temos que $|s'|_(\geq |s'|_)$. Adicionalmente, os possíveis prefixos de φ são $\epsilon, (, (\neg s'$, para s' prefixo de φ_1, ou φ. Nos dois primeiros casos, claramente temos que $|s|_(\geq |s|_)$; no último caso, por (a) $|\varphi|_(= |\varphi|_)$. Se $s = (\neg s'$ então $|s|_(= 1 + |s'|_(\stackrel{h.i.}{\geq} 1 + |s'|_) > |s'|_) = |s|_)$, e portanto $|s|_(\geq |s|_)$.

PI.b Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então por hipótese de indução temos que se s_i é um prefixo de φ_i então $|s_i|_(\geq |s_i|_)$ $(i \in \{1, 2\})$. Os possíveis prefixos de φ são da forma $\epsilon, (s_1, (\varphi_1 \star s_2$ e φ. No primeiro e no último casos, o resultado é trivial e consequência de (a), respectivamente. Se $s = (s_1$ então $|s|_(= 1 + |s_1|_(\stackrel{h.i.}{\geq} 1 + |s_1|_) > |s_1|_) = |s|_)$, e portanto $|s|_(\geq |s|_)$. Se $s = (\varphi_1 \star s_2$, sempre que $|\varphi_1|_(= |\varphi_1|_)$ por (a), então $|s|_(= 1 + |\varphi_1|_(+ |s_2|_(= 1 + |\varphi_1|_) + |s_2|_(\stackrel{h.i.}{\geq} 1 + |\varphi_1|_) + |s_2|_) > |\varphi_1|_) + |s_2|_) = |s|_)$. Logo, $|s|_(\geq |s|_)$.

(c) Demonstre que a palavra vazia não é uma fórmula.

Solução

Fórmulas da lógica proposicional são construídas de acordo com a seguinte gramática:

$$\varphi ::= \bot \mid \top \mid p \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi)$$

Desta forma, qualquer fórmula possui pelo menos um símbolo, e portanto a palavra vazia não é uma fórmula. Formalmente, como nos casos precedentes, também se procede por indução em φ:

BI Constantes ou variáveis proposicionais não são a palavra vazia.

PI.a Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$, por h.i. φ_1 não é a palavra vazia e consequentemente, φ não pode ser a palavra vazia.

PI.b Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, para $\star \in \{\wedge, \vee, to\}$, por h.i. φ_1 e φ_2 não são a palavra vazia e consequentemente, φ não pode ser a palavra vazia.

(d) Demonstre que uma fórmula bem formada não tem prefixos próprios que são também fórmulas: Se φ é uma fórmula bem formada e s é prefixo próprio de φ então s não pode ser uma fórmula bem formada.

Solução Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

- Se φ for uma constante ou variável proposicional então a propriedade vale, uma vez que o único prefixo próprio possível de φ é a palavra vazia, que por (c), não é uma fórmula.
- Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então os possíveis prefixos próprios de φ são ϵ, (e $(\neg s'$, onde s' é um prefixo de φ_1. O primeiro caso é consequência de (c). O segundo caso se obtem de (a), sempre que fórmulas bem formadas são balanceadas, mas $|(|_(= 1 > 0 = |(|_)$. Para $s = (\neg s'$, da prova de (b) temos que $|(\neg s'|_(> |(\neg s'|_)$; assim, novamente por (a) $(\neg s'$ não pode ser uma fórmula bem formada.
- Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então os possíveis prefixos próprios de φ são $\epsilon, (s_1$ e $(\varphi_1 \star s_2$, onde s_i é prefixo de φ_i $(i \in \{1, 2\})$. No primeiro caso ϵ no é fórmula de (c). Para o segundo caso usamos (a) como no item anterior: $|(s_1|_(> |(s_1|_)$, da prova de (b), assim $(s_1$ não pode ser uma fórmula bem formada. Se $s = (\varphi_1 \star s_2$, novamente da prova de (b) temos que $|(\varphi_1 \star s_2|_(> |(\varphi_1 \star s_2|_)$; assim por (a) $(\varphi_1 \star s_2$ não pode ser uma fórmula bem formada.

3. "Toda fórmula satisfatível é tautológica." Esta afirmação está correta? Justifique.

   Solução Não está, pois existem fórmulas que são satisfatíveis e que não são tautologias. Por exemplo, $a \rightarrow b$ satisfatível porque $I(a \rightarrow b) = T$ para a interpretação I tal que $I(a) = I(b) = T$. No entanto, para a interpretação I' tal que $I'(a) = T$ e $I'(b) = F$, temos que $I'(a \rightarrow b) = F$, e portanto $a \rightarrow b$ não é tautologia.

4. Construa a tabela de verdade e verifique se as fórmulas a seguir são tautologias, contradições ou contingências. Adicionalmente classifique-as como satisfatíveis ou insatisfatíveis:

   (a) $\psi \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))$

   Solução Tautologia, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	$\psi \rightarrow \phi$	$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$	$\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$	$\psi \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T

   (b) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\phi \wedge \delta \rightarrow \psi \wedge \gamma))$

   Solução Contingência, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	δ	γ	$\phi \to \psi$	$\delta \to \gamma$	$\phi \land \delta$	$\psi \land \gamma$	$\phi \land \delta \to \psi \land \gamma$	$(\delta \to \gamma) \to (\phi \land \delta \to \psi \land \gamma)$
F	F	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	F	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

(c) $\phi \to \neg\phi$ **Solução** Contingência, e portanto satisfatível.

ϕ	$\neg\phi$	$\phi \to \neg\phi$
F	T	T
T	F	F

(d) $(\phi \land \psi) \to (\psi \lor \phi)$ **Solução** Tautologia, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	$\phi \land \psi$	$\psi \lor \phi$	$(\phi \land \psi) \to (\psi \lor \phi)$
F	F	F	F	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

(e) $((\phi \land \psi) \lor (\phi \to \delta)) \land (\neg\phi \lor \delta)$

Solução Contingência, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	δ	$\neg\phi$	$\phi \land \psi$	$\phi \to \delta$	$\neg\phi \lor \delta$	$(\phi \land \psi) \lor (\phi \to \delta)$	$((\phi \land \psi) \lor (\phi \to \delta)) \land (\neg\phi \lor \delta)$
F	F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	T	F
T	T	T	F	T	T	T	T	T

5. Mostre que $\neg\phi \to \neg\psi$ é consequência lógica de $\psi \to \phi$, e vice-versa.

   Solução
   Seja I uma interpretação qualquer. Temos as seguintes equivalências: $I(\psi \to \phi) = V \Leftrightarrow I(\psi) = F$ ou $I(\phi) = V \Leftrightarrow I(\neg\psi) = V$ ou $I(\neg\phi) = F \Leftrightarrow I((\neg\phi) \to (\neg\psi))$.

6. A árvore de dedução abaixo está correta? Justifique e corrija caso a dedução esteja errada. (Lembre-se que "$a \leftrightarrow b$" abrevia "$(a \to b) \land (b \to a)$".)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi]^x$}
\AxiomC{$[\neg\phi \to \psi]^y$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ x$}
\UnaryInfC{$((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \to \neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\phi]^z$}
\RightLabel{$(\to_i)\ y$}
\UnaryInfC{$(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ z$}
\UnaryInfC{$\neg\phi \to ((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi)$}
\RightLabel{$(\wedge_i)$}
\BinaryInfC{$((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

Solução Não está correto, pois a hipótese x não está sendo descartada propriamente. Na prova acima há duas ramificações, e a hipótese y aparece na ramificação a esquerda, logo ela deve ser descartada nesta ramificação, e não na direita, como foi feito.

7. Prove os sequentes a seguir utilizando apenas a lógica proposicional minimal:

   (a) $\neg\neg\neg\phi \dashv\vdash \neg\phi$.

   Solução

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\neg\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\phi]^u$}
\AxiomC{$[\phi]^v$}
\LeftLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi$}
\LeftLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\neg\phi]^u$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

   (b) $\neg\neg(\phi \to \psi) \vdash (\neg\neg\phi) \to (\neg\neg\psi)$.

   Solução

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\neg(\phi \to \psi)$}
\AxiomC{$[\neg\neg\phi]^u$}
\AxiomC{$[\neg\psi]^v$}
\AxiomC{$[\phi \to \psi]^x$}
\AxiomC{$[\phi]^y$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ y$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg(\phi \to \psi)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$}
\end{prooftree}
$$

   Note que o outro sentido é minimal:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\phi \to \psi)]^x$}
\AxiomC{$[\psi]^w$}
\RightLabel{$(\to_i)\ \emptyset$}
\UnaryInfC{$\phi \to \psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ w$}
\UnaryInfC{$\neg\psi$}
\AxiomC{$\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$}
\AxiomC{$[\neg(\phi \to \psi)]^x$}
\AxiomC{$[\phi]^y$}
\AxiomC{$[\neg\phi]^z$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{ψ}
\RightLabel{$(\to_i)\ y$}
\UnaryInfC{$\phi \to \psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ z$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\phi \to \psi)$}
\end{prooftree}
$$

(c) $\neg\neg(\phi \land \psi) \dashv\vdash \neg\neg\phi \land \neg\neg\psi$.

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(\phi\land\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u \qquad \dfrac{[\phi\land\psi]^v}{\phi}\,(\land_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\phi\land\psi)}\,(\neg_i)\ v}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\phi}\,(\neg_i)\ u \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg(\phi\land\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^x \qquad \dfrac{[\phi\land\psi]^y}{\psi}\,(\land_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\phi\land\psi)}\,(\neg_i)\ y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\psi}\,(\neg_i)\ x}{\neg\neg\phi\land\neg\neg\psi}\,(\land_i)$$

$$\dfrac{\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\neg\neg\phi)\land(\neg\neg\psi)}{\neg\neg\psi} \qquad \dfrac{\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\neg\neg\phi)\land(\neg\neg\psi)}{\neg\neg\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{(\land_i)\,\dfrac{[\phi]^x \qquad [\psi]^y}{\phi\land\psi} \qquad [\neg(\phi\land\psi)]^z}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i)\ y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg(\phi\land\psi)}\,(\neg_i)\ z$$

(d) $\neg(\phi \lor \psi) \dashv\vdash \neg\phi \land \neg\psi$.

Solução

$$\dfrac{(\neg_i)\ u\ \dfrac{(\neg_e)\ \dfrac{\neg(\phi\lor\psi) \qquad (\lor_i)\,\dfrac{[\phi]^u}{\phi\lor\psi}}{\bot}}{\neg\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\phi\lor\psi) \qquad \dfrac{[\psi]^v}{\phi\lor\psi}\,(\lor_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i)\ v}{\neg\phi\land\neg\psi}\,(\land_i)$$

$$\dfrac{\dfrac{[(\phi\lor\psi)]^u \qquad (\neg_e)\,\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\neg\phi\land\neg\psi)}{\neg\phi} \qquad [\phi]^x}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{(\neg\phi\land\neg\psi)}{\neg\psi}\,(\land_e) \qquad [\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\lor_e)\ x,y}{\neg(\phi\lor\psi)}\,(\neg_i)\ u$$

(e) $(\phi \land \psi) \land \varphi \dashv\vdash \phi \land (\psi \land \varphi)$.

Solução

$$\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\phi\land\psi)\land\varphi}{(\phi\land\psi)}}{\phi} \qquad \dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\phi\land\psi)\land\varphi}{\phi\land\psi}}{\psi} \qquad \dfrac{(\phi\land\psi)\land\varphi}{\varphi}\,(\land_e)}{(\psi\land\varphi)}\,(\land_i)}{\phi\land(\psi\land\varphi)}\,(\land_i)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \varphi)}{\phi}(\wedge_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \varphi)}{(\psi \wedge \varphi)}(\wedge_e)}{\psi}(\wedge_e)}{(\phi \wedge \psi)}(\wedge_i) \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \varphi)}{(\psi \wedge \varphi)}(\wedge_e)}{\varphi}(\wedge_e)}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi}(\wedge_i)$$

(f) $(\phi \vee \psi) \vee \varphi \dashv\vdash \phi \vee (\psi \vee \varphi)$.
Solução

$$\dfrac{(\phi \vee \psi) \vee \varphi \qquad \dfrac{[(\phi \vee \psi)]^x \qquad \dfrac{[\phi]^z}{\phi \vee (\psi \vee \varphi)}(\vee_i) \qquad \dfrac{\dfrac{[\psi]^w}{(\psi \vee \varphi)}(\vee_i)}{\phi \vee (\psi \vee \varphi)}(\vee_i)}{\phi \vee (\psi \vee \varphi)}(\vee_e)\ z, w \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^y}{(\psi \vee \varphi)}(\vee_i)}{\phi \vee (\psi \vee \varphi)}(\vee_i)}{\phi \vee (\psi \vee \varphi)}(\vee_e)\ x, y$$

$$\dfrac{\phi \vee (\psi \vee \varphi) \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi]^x}{(\phi \vee \psi)}(\vee_i)}{(\phi \vee \psi) \vee \varphi}(\vee_i) \qquad \dfrac{[(\psi \vee \varphi)]^y \qquad \dfrac{\dfrac{[\psi]^u}{(\phi \vee \psi)}(\vee_i)}{(\phi \vee \psi) \vee \varphi}(\vee_i) \qquad \dfrac{[\varphi]^v}{(\phi \vee \psi) \vee \varphi}(\vee_i)}{(\phi \vee \psi) \vee \varphi}(\vee_e)\ u, v}{(\phi \vee \psi) \vee \varphi}(\vee_e)\ x, y$$

(g) $\phi \rightarrow \psi \vdash \delta \vee \phi \rightarrow \delta \vee \psi$
Solução

$$\dfrac{\dfrac{[\delta \vee \phi]^z \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \rightarrow \psi \qquad [\phi]^x}{\psi}(\rightarrow_e)}{\psi \vee \delta}(\vee_i) \qquad \dfrac{[\delta]^y}{\psi \vee \delta}(\vee_i)}{\psi \vee \delta}(\vee_e)\ x, y}{\delta \vee \phi \rightarrow \delta \vee \psi}(\rightarrow_i)\ z$$

(h) $(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi) \dashv\vdash \delta \wedge (\phi \vee \psi)$ (Distributividade)
Solução

$$\dfrac{\dfrac{(\delta\wedge\phi)\vee(\delta\wedge\psi)\quad \dfrac{[\delta\wedge\phi]^u}{\delta}\,(\wedge_e)\quad \dfrac{[\delta\wedge\psi]^v}{\delta}\,(\wedge_e)}{\delta}\,(\vee_e)\; u,v \qquad \dfrac{(\delta\wedge\phi)\vee(\delta\wedge\psi)\quad \dfrac{\dfrac{[\delta\wedge\phi]^x}{\phi}\,(\wedge_e)}{\phi\vee\psi}\,(\vee_i)\quad \dfrac{\dfrac{[\delta\wedge\psi]^t}{\psi}\,(\wedge_e)}{\phi\vee\psi}\,(\vee_i)}{\phi\vee\psi}\,(\vee_e)\; x,t}{\delta\wedge(\phi\vee\psi)}\,\wedge i$$

$$\dfrac{\dfrac{\delta\wedge(\phi\vee\psi)}{\phi\vee\psi}\,(\wedge_e)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta\wedge(\phi\vee\psi)}{\delta}\,(\wedge_e)\quad [\phi]^x}{\delta\wedge\phi}\,(\wedge_i)}{(\delta\wedge\phi)\vee(\delta\wedge\psi)}\,(\vee_i)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta\wedge(\phi\vee\psi)}{\delta}\,(\wedge_e)\quad [\psi]^y}{\delta\wedge\psi}\,(\wedge_i)}{(\delta\wedge\phi)\vee(\delta\wedge\psi)}\,(\vee_i)}{(\delta\wedge\phi)\vee(\delta\wedge\psi)}\,(\vee_e)\; x,y$$

Questões e itens “7g”e “7h”foram baseadas nos itens “b” e “e”da primeira questão em: http://wiki.di.uminho.pt/twiki/pub/Education/MFES/VF/exerciciosCoq.pdf

8. Prove o sequente a seguir utilizando apenas a lógica proposicional intuicionista:

   (a) $(\neg\neg\phi)\rightarrow(\neg\neg\psi)\vdash\neg\neg(\phi\rightarrow\psi)$.
   Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\rightarrow\psi)]^x\quad \dfrac{[\psi]^w}{\phi\rightarrow\psi}\,(\rightarrow_i)\;\emptyset}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i)\; w \qquad \dfrac{\neg\neg\phi\rightarrow\neg\neg\psi\quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\rightarrow\psi)]^x\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^y\quad[\neg\phi]^z}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\bot_e)}{\phi\rightarrow\psi}\,(\rightarrow_i)\; y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\phi}\,(\neg_i)\; z}{\neg\neg\psi}\,(\rightarrow_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg(\phi\rightarrow\psi)}\,(\neg_i)\; x$$

9. A lógica clássica é obtida acrescentando-se qualquer uma das seguintes regras à lógica proposicional intuicionista:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\phi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\phi}\,(\text{PBC})\; u \qquad\qquad \dfrac{}{\phi\vee\neg\phi}\,(\text{LEM})$$

$$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\,(\neg\neg_e) \qquad\qquad \dfrac{}{((\phi\rightarrow\psi)\rightarrow\phi)\rightarrow\phi}\,(\text{LP})$$

A quarta regra (LP) é denominada Lei de Peirce. Demonstre que quaisquer três destas regras pode ser provada a partir da quarta regra restante e as regras da lógica intuicionista, ou seja:

(a) Adicione a regra (PBC) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove os sequentes correspondentes à lei do terceiro excluído e à eliminação da dupla negação:

i. $\vdash \phi \lor \neg\phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^v}{\phi \lor \neg\phi}\,(\lor_i) \qquad [\neg(\phi \lor \neg\phi)]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\; v}{\phi \lor \neg\phi}\,(\lor_i) \qquad [\neg(\phi \lor \neg\phi)]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi \lor \neg\phi}\,(\text{PBC})\; u$$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\text{PBC})\; u$$

iii. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[((\phi \to \psi) \to \phi)]^x \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \to \neg\phi}\,(\to_i)\; \emptyset \qquad [\neg\psi]^v}{\neg\phi}\,(\to_e) \qquad [\phi]^w}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\text{PBC})\; v}{\phi \to \psi}\,(\to_i)\; w}{\phi}\,(\to_e) \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\text{PBC})\; u}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\,(\to_i)\; x$$

(b) Adicione a regra $(\neg\neg_e)$ ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\vdash \phi \lor \neg\phi$

Solução

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^v}{\phi \lor \neg\phi}(\lor_i) \qquad [\neg(\phi \lor \neg\phi)]^u}{\bot}(\neg_e)}{\neg\phi}(\neg_i)\ v}{\phi \lor \neg\phi}(\lor_i) \qquad [\neg(\phi \lor \neg\phi)]^u}{\bot}(\neg_e)}{\neg\neg(\phi \lor \neg\phi)}(\neg_i)\ u}{\phi \lor \neg\phi}(\neg\neg_e)
$$

ii. $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$
Solução

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \bot \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}(\to_e)}{\neg\neg\phi}(\neg_i)\ u}{\phi}(\neg\neg_e)
$$

iii. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$
Solução

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^1 \qquad [\neg\phi]^y}{\bot}(\neg_e)}{\psi}(\bot_e)}{\phi \to \psi}(\to_i)\ x \qquad [(\phi \to \psi) \to \phi]^z}{\phi}(\to_e) \qquad [\neg\phi]^y}{\bot}(\neg_e)}{\neg\neg\phi}(\neg_i)\ y}{\phi}(\neg\neg_e)}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}(\to_i)\ z
$$

(c) Adicione a regra (LEM) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$
Solução

$$\dfrac{\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\,(\mathrm{LEM}) \qquad [\phi]^v \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \bot \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\,(\to_e)}{\phi}\,(\bot_e)}{\phi}\,(\vee_e)\ v, u$$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$
Solução

$$\dfrac{\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\,(\mathrm{LEM}) \qquad [\phi]^v \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\bot_e)}{\phi}\,(\vee_e)\ v, u$$

iii. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$
Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\,(\mathrm{LEM}) \qquad [\phi]^z \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^x \qquad [\phi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\bot_e)}{\phi \to \psi}\,(\to_i)\ y \qquad [(\phi \to \psi) \to \phi]^w}{\phi}\,(\to_e)}{\phi}\,(\vee_e)\ x, z}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\,(\to_i)\ w$$

(d) Adicione a regra (LP) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$
Solução

$$\dfrac{((\phi \to \neg\phi) \to \phi) \to \phi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \bot \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi \to \neg\phi]^x \qquad [\phi]^y}{\neg\phi}\,(\to_e) \qquad \neg\phi \to \bot}{\bot}\,(\to_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ y}{\bot}\,(\to_e)}{\phi}\,(\bot_e)}{(\phi \to \neg\phi) \to \phi}\,(\to_i)\ x}{\phi}\,(\to_e)$$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$
Solução

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$((\phi \to \neg\phi) \to \phi) \to \phi$}
\AxiomC{$\neg\neg\phi$}
\AxiomC{$[\phi \to (\neg\phi)]^x$}
\AxiomC{$\neg\neg\phi$}
\RightLabel{(MT)}
\BinaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{ϕ}
\RightLabel{$(\to_i)\ x$}
\UnaryInfC{$(\phi \to \neg\phi) \to \phi$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{ϕ}
\end{prooftree}
$$

iii. $\vdash \phi \vee \neg\phi$
Solução

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(((\phi \vee \neg\phi) \to \neg\phi) \to (\phi \vee \neg\phi)) \to (\phi \vee \neg\phi)$}
\AxiomC{$[\phi]^x$}
\AxiomC{$[(\phi \vee \neg\phi) \to \neg\phi]^y$}
\AxiomC{$[\phi]^x$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\phi \vee \neg\phi$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\phi \vee \neg\phi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ y$}
\UnaryInfC{$(((\phi \vee \neg\phi) \to \neg\phi) \to (\phi \vee \neg\phi))$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\phi \vee \neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

10. Construa provas para todas as variantes das regras (MT) e (CP) e indique quais derivações são da lógica clássica e quais da lógica intuicionista proposicional:

$$
\frac{\pm\phi \to \pm\psi \qquad \mp\psi}{\mp\phi}\ (\mathrm{MT}_{1\text{ e }2})
\qquad\qquad
\frac{\pm/\pm\phi \to \pm/\mp\psi}{\mp/\pm\psi \to \mp/\mp\phi}\ (\mathrm{CP}_{1,2,3\text{ e }4})
$$

Solução

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \qquad [\phi]^x}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ x$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \neg\psi \qquad [\neg\phi]^x}{\neg\psi}\,(\to_e) \qquad \psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\mathrm{PBC})\ x$$

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \quad [\neg\psi]^u}{\neg\phi}\,(\mathrm{MT})}{\neg\psi \to \neg\phi}\,(\to_i)\ u$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \neg\psi \qquad \dfrac{[\psi]^u}{\neg\neg\psi}\,(\neg\neg_i)}{\neg\neg\phi}\,(\mathrm{MT})}{\phi}\,(\neg\neg_e)}{\psi \to \phi}\,(\to_i)\ u$$

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \neg\psi \qquad [\phi]^x}{\neg\psi}\,(\to_e) \qquad [\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ x}{\psi \to \neg\phi}\,(\to_i)\ y$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \psi \qquad [\neg\phi]^x}{\psi}\,(\to_e) \qquad [\neg\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\mathrm{PBC})\ x}{\neg\psi \to \phi}\,(\to_i)\ y$$

11. Construa deduções para provar os sequentes a seguir e e indique se foi utilizada a lógica

minimal, intuicionista ou clássica:

(a) $\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

Minimal

$$\dfrac{\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi \wedge \neg\psi]^u}{\neg\phi}\,(\wedge_e) \qquad [\phi]^x}{\bot}\,(\neg_e) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi \wedge \neg\psi]^u}{\neg\psi}\,(\wedge_e) \qquad [\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\vee_e)\ x, y}{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}\,(\neg_i)\ u$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\phi \vee \psi)]^w \qquad \dfrac{[\phi]^u}{\phi \vee \psi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ u \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\phi \vee \psi)]^w \qquad \dfrac{[\psi]^v}{\phi \vee \psi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i)\ v}{\neg\phi \wedge \neg\psi}\,(\wedge_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi \vee \psi}\,(\text{PBC})\ w$$

(b) $\phi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$.

Minimal

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\phi \vee \neg\psi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\,(\wedge_e) \qquad [\neg\phi]^x}{\bot}\,(\neg_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge_e) \qquad [\neg\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\vee_e)\ x, y}{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)}\,(\neg_i)\ u$$

Clássica

$$
\dfrac{\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vee \neg\psi}\,((\text{LEM})) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^z \qquad [\psi]^x}{\phi \wedge \psi}\,(\wedge_i) \qquad \neg(\phi \wedge \psi)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ z}{\neg\phi \vee \neg\psi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{[\neg\psi]^y}{\neg\phi \vee \neg\psi}\,(\vee_i)}{\neg\phi \vee \neg\psi}\,(\vee_e)\ x, y}{\dfrac{\bot}{\phi \wedge \psi}\,(\text{PBC})\ u}\,(\neg_e)
$$

(c) $\varphi \to \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$

Clássica

$$
\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\text{LEM}) \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^x \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\,(\to_e)}{\neg\varphi \vee \psi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^y}{\neg\varphi \vee \psi}\,(\vee_i)}{\neg\varphi \vee \psi}\,(\vee_e)\ x, y
$$

Intuicionista

$$
\dfrac{\dfrac{(\neg\varphi) \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^w \qquad [\neg\varphi]^x}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\bot_e) \qquad [\psi]^y}{\psi}\,(\vee_e)\ x, y}{\varphi \to \psi}\,(\to_i)\ w
$$

(d) $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$

Intuicionista

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,(\wedge_e) \qquad [\varphi \to \neg\psi]^x}{\neg\psi}\,(\to_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\varphi \to \neg\psi)}\,(\neg_i)\ x
$$

Clássica

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg(\varphi \to \neg\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^x \qquad [\neg\varphi]^y}{\bot}\,(\bot_e)}{\neg\psi}\,(\bot_e)}{\varphi \to \neg\psi}\,(\to_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)
}{\varphi}\,(\text{PBC})\ y
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\neg(\varphi \to \neg\psi) \qquad \dfrac{[\neg\psi]^z}{\varphi \to \neg\psi}\,(\to_i)\ \emptyset}{\bot}\,(\neg_e)
}{\psi}\,(\text{PBC})\ z
}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge_i)
$$

(e) $\varphi \vee \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \to \psi$

Clássica

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\text{LEM})
\qquad
\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^x \qquad (\neg\varphi) \to \psi}{\psi}\,(\to_e)}{\varphi \vee \psi}\,(\vee_i)
\qquad
\dfrac{[\varphi]^y}{\varphi \vee \psi}\,(\vee_i)
}{\varphi \vee \psi}\,(\vee_e)\ x, y
$$

Intuicionista

$$
\dfrac{
\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^w \qquad [\varphi]^x}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\bot_e) \qquad [\psi]^y}{\psi}\,(\vee_e)\ x, y
}{(\neg\varphi) \to \psi}\,(\to_i)\ w
$$

12. Prove os sequentes a seguir utilizando o Cálculo de Gentzen e indique se foi utilizada a lógica intuicionista ou clássica:

(a) $\phi \wedge \psi \vdash \phi$. Intucionista

$$
\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\phi \wedge \psi \Rightarrow \phi}\,(L_\wedge)
$$

(b) $\neg(\phi \vee \psi) \vdash (\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Clássica

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\phi \Rightarrow \phi \vee \psi}\,(R_\vee)}{\Rightarrow \neg\phi, \phi \vee \psi}\,(R_\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \phi \vee \psi}\,(R_\vee)}{\Rightarrow \neg\psi, \phi \vee \psi}\,(R_\to)}{\Rightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi), \phi \vee \psi}\,(R_\wedge) \qquad \bot \Rightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)}{\neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)}\,(L_\to)
$$

(c) $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi$. Clássica

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\phi \wedge \psi, \Rightarrow \phi}\,(L_\wedge) \qquad \phi \wedge \psi, \bot \Rightarrow}{\phi \wedge \psi, \neg\phi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\phi \wedge \psi \Rightarrow \neg\neg\phi}\,(L_\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\phi \wedge \psi, \Rightarrow \psi}\,(L_\wedge) \qquad \phi \wedge \psi, \bot \Rightarrow}{\phi \wedge \psi, \neg\psi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\phi \wedge \psi \Rightarrow \neg\neg\psi H}\,(R_\to)}{\phi \wedge \psi \Rightarrow \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi}\,(R_\wedge)}{\Rightarrow \neg(\phi \wedge \psi), \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi}\,(R_\to) \qquad \bot \Rightarrow \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi}{\neg\neg(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi}\,(L_\to)
$$

(d) $\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$. Clássica

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\phi \Rightarrow \phi \vee \psi}\,(R_\vee)}{\Rightarrow \phi \vee \psi, \neg\phi}\,(R_\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \phi \vee \psi}\,(R_\vee)}{\Rightarrow \phi \vee \psi, \neg\psi}\,(R_\to)}{\Rightarrow \phi \vee \psi, \neg\phi \wedge \neg\psi}\,(R_\wedge) \qquad \bot \Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi}{\neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi}\,(R_\to)
$$

Intucionista

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi \quad \bot, \phi \Rightarrow}{\neg\phi, \phi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\neg\phi \wedge \neg\psi, \phi \Rightarrow}\,(L_\wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi \quad \bot, \psi \Rightarrow}{\neg\psi, \psi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\neg\phi \wedge \neg\psi, \psi \Rightarrow}\,(R_\wedge)}{\neg\phi \wedge \neg\psi, \phi \vee \psi \Rightarrow}\,(L_\vee)}{\neg\phi \wedge \neg\psi \Rightarrow \neg(\phi \vee \psi)}\,(R_\to)
$$

(e) $(\phi \to \psi) \wedge (\delta \to \psi) \vdash (\phi \wedge \delta) \to \psi$. Clássica

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \psi, \phi \quad \psi, \phi \Rightarrow \psi}{\phi \to \psi, \phi \Rightarrow \psi}\,(L_\to)}{\phi \to \psi, \phi \wedge \delta \Rightarrow \psi}\,(L_\wedge)}{(\phi \to \psi) \wedge (\delta \to \psi), \phi \wedge \delta \Rightarrow \psi}\,(L_\wedge)}{(\phi \to \psi) \wedge (\delta \to \psi) \Rightarrow (\phi \wedge \delta) \to \psi}\,(R_\to)
$$

(f) $(\phi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \neg\phi)$. Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \psi, \phi \quad \psi, \phi \Rightarrow \psi}{\phi \to \psi, \phi \Rightarrow \psi}\,(L_\to) \quad \phi \to \psi, \bot, \phi \Rightarrow}{\phi \to \psi, \neg\psi, \phi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\phi \to \psi, \neg\psi \Rightarrow \neg\phi}\,(R_\to)}{\phi \to \psi \Rightarrow \neg\psi \to \neg\phi}\,(R_\to)$$

(g) $\vdash (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi \quad \phi, \bot \Rightarrow}{\phi, \neg\phi \Rightarrow}\,(R_\to)}{\phi, \neg\phi \wedge \neg\psi \Rightarrow}\,(L_\wedge) \quad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi \quad \psi, \bot \Rightarrow}{\psi, \neg\psi \Rightarrow}\,(R_\to)}{\psi, \neg\phi \wedge \neg\psi \Rightarrow}\,(L_\wedge)}{\phi \vee \psi, \neg\phi \wedge \neg\psi \Rightarrow}\,(L_\vee)}{\phi \vee \psi \Rightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}\,(R_\to)}{\Rightarrow (\phi \vee \psi) \to \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}\,(R_\to) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi}{\phi \Rightarrow \phi \vee \psi}\,(R_\vee)}{\Rightarrow \neg\phi, \phi \vee \psi}\,(R_\to) \quad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \phi \vee \psi}\,(R_\vee)}{\Rightarrow \neg\psi, \phi \vee \psi}\,(R_\to)}{\Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi, \phi \vee \psi}\,(R_\wedge) \quad \bot \Rightarrow \phi \vee \psi}{\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \phi \vee \psi}\,(L_\to)}{\Rightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \to (\phi \vee \psi)}\,(R_\to)}{\Rightarrow (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)}\,(R_\wedge)$$

(h) $\vdash (\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\phi \to \psi)$. Intucionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi, \phi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \phi \to \psi}\,(R_\to) \quad \bot, \psi \Rightarrow}{\neg(\phi \to \psi), \psi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\neg(\phi \to \psi) \Rightarrow \neg\psi}\,(R_\to) \quad \bot, \neg(\phi \to \psi) \Rightarrow}{\neg\neg\psi, \neg(\phi \to \psi) \Rightarrow}\,(L_\to) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \Rightarrow \phi \quad \bot, \phi \Rightarrow}{\neg\phi, \phi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\neg\phi, \phi \Rightarrow \psi}\,(Rw)}{\neg\phi \Rightarrow \phi \to \psi}\,(R_\to) \quad \bot, \neg\phi \Rightarrow}{\neg(\phi \to \psi), \neg\phi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\neg(\phi \to \psi) \Rightarrow \neg\neg\phi}\,(R_\to)}{}}{\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi, \neg(\phi \to \psi) \Rightarrow}\,(L_\to)}{\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi \Rightarrow \neg\neg(\phi \to \psi)}\,(R_\to)}{\Rightarrow (\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi) \to \neg\neg(\phi \to \psi)}\,(R_\to)$$

(i) $(\phi \wedge (\psi \vee \delta)) \vdash ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \delta))$. Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi, \psi \Rightarrow \phi, \phi \wedge \delta \quad \phi, \psi \Rightarrow \psi, \phi \wedge \delta}{\phi, \psi \Rightarrow \phi \wedge \psi, \phi \wedge \delta}\,(R_\wedge) \quad \dfrac{\phi, \delta \Rightarrow \phi \wedge \psi, \phi \quad \phi, \delta \Rightarrow \phi \wedge \psi, \delta}{\phi, \delta \Rightarrow \phi \wedge \psi, \phi \wedge \delta}\,(R_\wedge)}{\phi, \psi \vee \delta \Rightarrow \phi \wedge \psi, \phi \wedge \delta}\,(L_\vee)}{\phi, \phi \wedge (\psi \vee \delta) \Rightarrow \phi \wedge \psi, \phi \wedge \delta}\,(L_\wedge)}{\phi \wedge (\psi \vee \delta), \phi \wedge (\psi \vee \delta) \Rightarrow \phi \wedge \psi, \phi \wedge \delta}\,(L_\wedge)}{\phi \wedge (\psi \vee \delta) \Rightarrow \phi \wedge \psi, \phi \wedge \delta}\,(LC)}{\phi \wedge (\psi \vee \delta) \Rightarrow \phi \wedge \psi, (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \delta)}\,(R_\vee)}{\phi \wedge (\psi \vee \delta) \Rightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \delta), (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \delta)}\,(R_\vee)}{\phi \wedge (\psi \vee \delta) \Rightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \delta)}\,(RC)$$

(j) $p \lor q \vdash \neg(\neg p \land \neg q)$ Intucionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, \bot, \neg q \Rightarrow \quad p, \neg q \Rightarrow p}{p, \neg p, \neg q \Rightarrow}\,(L_\to) \qquad \dfrac{q, \neg p, \bot \Rightarrow \quad q, \neg p \Rightarrow q}{q, \neg p, \neg q \Rightarrow}\,(R_\to)}{p \lor q, \neg p, \neg q \Rightarrow}\,(L_\lor)}{p \lor q, \neg p, \neg p \land \neg q \Rightarrow}\,(L_\land)}{p \lor q, \neg p \land \neg q, \neg p \land \neg q \Rightarrow}\,(L_\land)}{p \lor q, \neg p \land \neg q \Rightarrow}\,(LC)}{p \lor q \;\Rightarrow\; \neg(\neg p \land \neg q)}\,(R_\to)$$

(k) $\neg(\neg p \land \neg q) \vdash p \lor q$ Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p, q}{\Rightarrow p, q, \neg p}\,(R_\to) \qquad \dfrac{q \Rightarrow p, q}{\Rightarrow p, q, \neg q}\,(R_\to)}{\Rightarrow p, q, \neg p \land \neg q}\,(L_\land) \qquad \bot \;\Rightarrow\; p, q}{\neg(\neg p \land \neg q) \;\Rightarrow\; p, q}\,(L_\to)}{\neg(\neg p \land \neg q) \;\Rightarrow\; p, p \lor q}\,(R_\lor)}{\neg(\neg p \land \neg q) \;\Rightarrow\; p \lor q, p \lor q}\,(R_\lor)}{\neg(\neg p \land \neg q) \;\Rightarrow\; p \lor q}\,(RC)$$

13. Apresente provas minimais ou intuicionistas para os sequentes:

(a) $\vdash \neg\neg(\phi \lor \neg\phi)$;

(b) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \to \phi)$;

(c) $\vdash \neg\neg(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$.

(a) Para $\vdash \neg\neg(\phi \lor \neg\phi)$, temos a seguinte derivação no cálculo de sequentes minimal:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad (\mathrm{Ax})}{\varphi \Rightarrow \varphi \lor \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\lor) \qquad \bot, \varphi \Rightarrow \bot \quad (\mathrm{L}_\bot)}{\neg(\varphi \lor \neg\varphi), \varphi \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{L}_\to)}{\neg(\varphi \lor \neg\varphi) \Rightarrow \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\to)}{\neg(\varphi \lor \neg\varphi) \Rightarrow \varphi \lor \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\lor) \qquad \bot, \neg(\varphi \lor \neg\varphi) \Rightarrow \bot \quad (\mathrm{L}_\bot)}{\neg(\varphi \lor \neg\varphi), \neg(\varphi \lor \neg\varphi) \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{L}_\to)}{\neg(\varphi \lor \neg\varphi) \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{LC})}{\Rightarrow \neg\neg(\varphi \lor \neg\varphi)}\,(\mathrm{R}_\to)$$

(b) Para $\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \to \phi)$, temos a seguinte derivação no cálculo de sequentes intuicionista, mas note que pode ser derivado utilizando o cálculo minimal:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi, \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi\ (\mathrm{Ax})}{\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi}(\mathrm{R}_\to) \quad \bot \Rightarrow \bot\ (\mathrm{Ax})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \varphi \Rightarrow \bot}(\mathrm{L}_\to)}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \neg\varphi}(\mathrm{R}_\to) \quad \bot \Rightarrow\ (\mathrm{L}_\bot)}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \neg\neg\varphi \Rightarrow}(\mathrm{L}_\to)}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}(\mathrm{RW})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi}(\mathrm{R}_\to) \quad \bot \Rightarrow \bot\ (\mathrm{Ax})}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi), \neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \bot}(\mathrm{L}_\to)}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \Rightarrow \bot}(\mathrm{LC})}{\Rightarrow \neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)}(\mathrm{R}_\to)
$$

(c) $\vdash \neg\neg(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u \quad \dfrac{\begin{array}{c} [\neg\neg((\phi \to \psi) \to \phi)]^x \\ \vdots\ (\text{Ex. 7b}) \\ \neg\neg(\phi \to \psi) \to \neg\neg\phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \to \neg\phi}(\to_i)\,\emptyset \quad [\neg\psi]^v}{\neg\phi}(\to_e) \quad [\neg\neg\phi]^w}{\bot}(\neg_e)}{\neg\neg\psi}(\neg_i)\ v}{\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi}(\to_i)\ w \\ \vdots\ (\text{Ex. 8a}) \\ \neg\neg(\phi \to \psi) \end{array}}{\neg\neg\phi}(\to_e)}{\bot}(\neg_e)}{\neg\neg\phi}(\neg_i)\ u}{\neg\neg((\phi \to \psi) \to \phi) \to \neg\neg\phi}(\to_i)\ x \\
\vdots\ (\text{Ex. 8a}) \\
\neg\neg(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)
\end{array}
$$

14. Prove o teorema de Glivenko: Sejam Γ um conjunto finito de fórmulas, e φ uma fórmula qualquer da lógica proposicional. Prove que se φ tem uma prova clássica a partir de Γ então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ, ou seja, se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$

Solução

Indução na derivação $\Gamma \vdash_c \varphi$. Considerando que a negação pode ser vista como uma abreviação da implicação ao absurdo, i.e. $\neg\varphi \equiv \varphi \to \bot$, os casos $(\neg_i)$ e $(\neg_e)$ não precisam ser considerados separadamente (complete!). Considere a última regra aplicada na prova $\Gamma \vdash_c \varphi$:

- $(\wedge_i)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_1\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$$

  Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_2\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]^x \quad \dfrac{[\varphi_1]^y \qquad [\varphi_2]^z}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_1}\ (\neg_i)\ y}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_2}\ (\neg_i)\ z}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)}\ (\neg_i)\ x$$

- $(\wedge_e)$: Neste a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\ (\wedge_e)$$

  Por hipótese de indução temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi\wedge\psi)\end{array}}{(\neg\neg\varphi)\wedge(\neg\neg\psi)}\ \text{Exercício (7.}c\text{)}}{\neg\neg\varphi}\ (\wedge_e)$$

- $(\vee_i)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_i$ $(i = 1, 2)$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)]^x \qquad \dfrac{[\varphi_1]^y}{\varphi_1\vee\varphi_2}\ (\vee_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\varphi_1}\ (\neg_i)\ y}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\neg(\varphi_1\vee\varphi_2)}\ (\neg_i)\ x$$

- $(\vee_e)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla\\ (\varphi_1\vee\varphi_2)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_1]^x,\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_2]^y,\Gamma\\ \nabla\\ \varphi_3\end{array}}{\varphi_3}\ (\vee_e)\ x, y$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ e $\Gamma, [\varphi_i] \vdash_i \neg\neg\varphi_3$ $(i = 1, 2)$ e concluímos como segue:

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)]}{} \! \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_{(\text{h.i.})}\\ \neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi_3]^w \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi_1]^y\\ \nabla_{(\text{h.i.})}\\ \neg\neg\varphi_3\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi_2]^z\\ \nabla_{(\text{h.i.})}\\ \neg\neg\varphi_3\end{array} \quad [\varphi_1 \vee \varphi_2]^x}{\neg\neg\varphi_3}\,(\vee_e)\ y,z}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)}\,(\neg_i)\ x}{\dfrac{\bot}{\neg\neg\varphi_3}\,(\neg_i)\ w}\,(\neg_e)
$$

- $(\rightarrow_i)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad [\varphi_1]^x\\ \hline \searrow \quad \varphi_2 \quad \swarrow\end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}\,(\rightarrow_i)
$$

  Por hipótese de indução, temos que $\Gamma, \varphi_1 \vdash_i \neg\neg\varphi_2$, e concluímos como segue:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi_1]^w \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi_2]^z \qquad \begin{array}{c}\Gamma\ [\varphi_1]^x\\ \nabla_{(\text{h.i.})}\\ \neg\neg\varphi_2\end{array}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi_1}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi_2}\,(\neg_i)\ z}{(\neg\neg\varphi_1) \rightarrow (\neg\neg\varphi_2)}\,(\rightarrow_i)\ w}{\neg\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)}\ \text{EXERCÍCIO } (7.b)
$$

- $(\rightarrow_e)$: Neste caso, temos que φ é da forma $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ e a prova $\Gamma \vdash_c \varphi$ tem a seguinte estrutura:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \hline \searrow \ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \ \swarrow\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \hline \searrow \ \varphi_1 \ \swarrow\end{array}}{\varphi_2}\,(\rightarrow_e)
$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi_1$ e $\Gamma \vdash_i \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$ e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg(\varphi_1\to\varphi_2)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \nabla_{\text{(h.i.)}}\\ \neg\neg\varphi_1\end{matrix} \qquad \dfrac{[\varphi_1\to\varphi_2]^x \qquad [\neg\varphi_2]^y}{\neg\varphi_1}\,(\text{MT})}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\varphi_1\to\varphi_2)}\,(\neg_i), x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi_2}\,(\neg_i), y$$

- (PBC): Neste caso, temos que:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\quad[\neg\varphi]^x\\ \nabla\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\,(\text{PBC})\ x$$

Por hipótese de indução, temos que $\Gamma, \neg\varphi \vdash_i \neg\neg\bot$, e concluímos como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ [\neg\varphi]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\bot\end{matrix} \qquad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\ y$$

15. Conjuntos Completos de Conectivos: Seja φ uma fórmula da lógica proposicional.

    (a) Prove, sem utilizar tabela de verdade, que existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.

    Indução sobre a estrutura de φ:

    - Se φ é uma variável proposicional então tome $\varphi' = \varphi$.
    - Se $\varphi = \neg\psi$ então, por hipótese de indução, existe uma fórmula ψ' equivalente a ψ construída apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em ψ. Neste caso, basta tomar $\varphi' = \neg\psi'$, e estamos prontos.

- Se $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Neste caso, basta tomar $\varphi' = \psi_1' \vee \psi_2'$ e estamos prontos.
- Se $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Por um exercício anterior sabemos que $\varphi \dashv\vdash \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$. Então basta tomar $\varphi' = \neg(\neg\psi_1' \vee \neg\psi_2')$, e estamos prontos.
- Por fim, se $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Por um exercício anterior sabemos que $\varphi \dashv\vdash (\neg\psi_1) \vee \psi_2$. Então basta tomar $\varphi' = (\neg\psi_1') \vee \psi_2'$ e estamos prontos.

(b) Prove, sem utilizar tabela de verdade, que existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\to$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.

Indução sobre a estrutura de φ:

- Se φ é uma variável proposicional então tome $\varphi' = \varphi$.
- Se $\varphi = \neg\psi$ então, por hipótese de indução, existe uma fórmula ψ' equivalente a ψ construída apenas com os conectivos $\to$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em ψ.
- Se $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\to$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Por um exercício anterior sabemos que $\varphi \dashv\vdash (\neg\psi_1) \to \psi_2$. Então basta tomar $\varphi' = (\neg\psi_1') \to \psi_2'$, e estamos prontos.
- Se $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\to$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Por um exercício anterior sabemos que $\varphi \dashv\vdash \neg(\psi_1 \to \neg\psi_2)$. Então basta tomar $\varphi' = \neg(\psi_1' \to \neg\psi_2')$, e estamos prontos.
- Por fim, se $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\to$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Neste caso, basta tomar $\varphi' = \psi_1' \to \psi_2'$, e estamos prontos.