

LÓGICA COMPUTACIONAL

GABARITO DA SEGUNDA PROVA

TÓPICOS: LÓGICA DE PREDICADOS
SEMÂNTICA E DEDUÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

7 DE DEZEMBRO DE 2016

PROF. MAURICIO AYALA-RINCÓN

Nome:

Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 17:45; Três páginas, Três questões

Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas como derivações do cálculo de dedução natural (DN) ou do cálculo de sequentes de Gentzen (CG), apresentadas como árvores de derivação, e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

- (4 pontos) Demonstre, seja em dedução natural ou no cálculo de Gentzen, que $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ e $\neg\forall x\neg\varphi \rightarrow \exists x\varphi$ são teoremas da lógica clássica. Adicionalmente, demonstre que essas fórmulas não são teoremas da lógica intuicionista. Siga o roteiro abaixo.
 - (1 ponto) Costrua uma derivação, seja no cálculo de dedução natural ou de Gentzen, para $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \forall x\varphi$.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\exists x\neg\varphi]^u}{\neg\exists x\neg\varphi} \quad \frac{[\neg\varphi[x/y]]^v}{\exists x\neg\varphi} (\exists_i)}{\perp} (\neg_e)}{\varphi[x/y]} (\text{PBC}) v}{\forall x\varphi} (\forall_i)}{\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \forall x\varphi} (\rightarrow_i) u$$

- (1 ponto) Costrua uma derivação, seja no cálculo de dedução natural ou de Gentzen, para $\neg\forall x\neg\varphi \rightarrow \exists x\varphi$.

$$\begin{array}{c}
\frac{[\varphi[x/y]]^v}{\exists_x \varphi} (\exists_i) \quad \frac{[\neg \exists_x \varphi]^u}{\neg \exists_x \varphi} (\neg_e) \\
\hline
\perp \\
\hline
\neg \varphi[x/y] \quad (\neg_i) \ v \\
\hline
\forall_x \neg \varphi \quad (\forall_i) \quad \frac{[\neg \forall_x \neg \varphi]^w}{\neg \forall_x \neg \varphi} (\neg_e) \\
\hline
\perp \\
\hline
\exists_x \varphi \quad (\text{PBC}) \ u \\
\hline
\neg \forall_x \neg \varphi \rightarrow \exists_x \varphi \quad (\rightarrow_i) \ w
\end{array}$$

- (c) (1 ponto) Prove que não existe uma derivação intuicionista para $\neg \exists_x \neg \varphi \vdash_N \forall_x \varphi$ (ou correspondentemente no cálculo de Gentzen, para $\vdash_G \neg \exists_x \neg \varphi \Rightarrow \forall_x \varphi$).

Dica: tanto para este quanto para o seguinte item, mesmo que existam derivações clássicas de ambos os sequentes, isto não implica que estes sejam estritamente clássicos, mas destes pode ser inferido o teorema estritamente clássico $\neg \neg \psi \rightarrow \psi$.

Usam-se apenas regras minimais e assume-se a existência de uma derivação para $\neg \exists_x \neg \varphi \vdash_N \forall_x \varphi$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\exists_x \neg \psi]^u}{\neg \psi} \quad \frac{[\neg \psi[x/y]]^w}{\neg \psi[x/y]} (\exists_e) \ w \quad \neg \neg \psi \\
\hline
\perp \\
\hline
\neg \exists_x \neg \psi \quad (\neg_i) \ u \\
\hline
\forall_x \psi \quad \text{ASS.} \\
\hline
\psi \quad (\forall_e)
\end{array}$$

Note que a aplicação da regra (\exists_e) acima é justificada sempre que a variável x pode ser escolhida de maneira que não ocorra em ψ ; assim, a variável testemunha y tampoco ocorre em $\neg \psi[x/y]$.

- (d) (1 ponto) Prove que não existe uma derivação intuicionista para $\neg \forall_x \neg \varphi \vdash_N \exists_x \varphi$ (ou correspondentemente, no cálculo de Gentzen para $\vdash_G \neg \forall_x \neg \varphi \Rightarrow \exists_x \varphi$).

Como no item precedente, usam-se apenas regras minimais e assume-se a existência de uma derivação para $\neg \forall_x \neg \varphi \vdash \exists_x \varphi$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\forall_x \neg \psi]^u}{\neg \psi} (\forall_e) \quad \neg \neg \psi \\
\hline
\perp \\
\hline
\neg \forall_x \neg \psi \quad (\neg_i) \ u \\
\hline
\exists_x \psi \quad \text{ASS.} \quad \frac{[\psi[x/y]]^w}{\psi} (\exists_e) \ w \\
\hline
\psi
\end{array}$$

Como no item precedente, justifica-se a aplicação da regra (\exists_e) na derivação acima: x é selecionado de forma que não ocorre em ψ ; assim tampoco y ocorre em $\psi[x/y]$.

2. (4 pontos) O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de seqüentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de seqüentes e vice-versa, i.e.,

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação. Abaixo vemos alguns casos críticos do passo indutivo.

- (a) (2 pontos) No sentido “ $\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$ ”, considere uma derivação que termina na aplicação da regra de corte (intuicionista):

$$\frac{\begin{array}{c} \nabla'_1 \\ \Gamma \Rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \nabla'_2 \\ \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \text{ (Cut)}$$

Demonstre então que existe uma derivação correspondente no sistema de dedução natural. Para isso suponha por hipótese de indução, que existem deduções naturais ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$ como abaixo:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla'_1 \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi \end{array}$$

Combine essas deduções para obter uma dedução de $\Gamma \vdash_N \varphi$.

Para obter as derivações desejadas, todas as suposições de $[\psi]^u$ na derivação ∇'_2 são substituídas por derivações de ψ usando a derivação ∇'_1 :

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla'_1 \\ [\psi] \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi \end{array}$$

- (b) (2 pontos) No sentido “ $\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$ ”, considere uma derivação natural para $\Gamma \vdash_N \varphi$ que finaliza numa aplicação de (\exists_e) como abaixo:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla'_1 \\ [\exists x \psi]^v \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi[x/y]]^u \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi \end{array}}{\varphi} (\exists_e) u$$

Demonstre que existe uma derivação *à la Gentzen* para $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$.

Tabela 2: REGRAS DE DEDUÇÃO NATURAL PARA LÓGICA PROPOSICIONAL (CLÁSSICA)

introduction rules	elimination rules
$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e)$
$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^v \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} (\vee_e), u, v$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i), u$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow_e)$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg_i), u$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg_e)$
$\frac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi} (\forall_i)$	$\frac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]} (\forall_e)$
where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi} (\neg \neg_e)$
$\frac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi} (\exists_i)$	$\frac{\begin{array}{c} [\varphi[x/x_0]]^u \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} (\exists_e) u$
	where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ .

Tabela 3: REGRAS DE DEDUÇÃO À LA GENTZEN PARA A LÓGICA DE PREDICADOS

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$ (Ax)	$\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (L_{\perp})
Structural rules:	
$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (LW eakening)	$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$ (RW eakening)
$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (LC ontraction)	$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$ (RC ontraction)
Logical rules:	
$\frac{\varphi_{i \in \{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (L_{\wedge})	$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$ (R_{\wedge})
$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (L_{\vee})	$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}$ (R_{\vee})
$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (L_{\rightarrow})	$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$ (R_{\rightarrow})
$\frac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (L_{\forall})	$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi}$ (R_{\forall}), $y \notin \text{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\frac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (L_{\exists}), $y \notin \text{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi}$ (R_{\exists})

Tabela 4: REGRA DE CORTE

$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ (Cut)
