Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
CIC 117366 Lógica Computacional 1 - Turmas A e B **(2019/2)**

29 de agosto de 2019

Lista: Lógica Proposicional - Dedução Natural

Em adição aos exercícios que aparecem nas notas de aula, solucione os listados a seguir. Nas sua derivações, sempre indique qual regra dedutiva é utilizada em cada passo.

1. Considere a estrutura de listas de números naturais dada por:

$$l ::= nil \mid cons(n, l)$$

onde nil representa a lista vazia, e $cons(n, l)$ denota a lista com cabeça n e cauda l.

O comprimento de uma lista é definido recursivamente por:

$$length(l) = \begin{cases} 0, & \text{se } l = nil \\ 1 + length(l'), & \text{se } l = cons(a, l') \end{cases}$$

A concatenação de listas também pode ser definida por uma função recursiva:

$$concat(l_1, l_2) = \begin{cases} l_2, & \text{se } l_1 = nil \\ cons(a, concat(l', l_2)), & \text{se } l_1 = cons(a, l') \end{cases}$$

O reverso de listas é definido por:

$$rev(l) = \begin{cases} l, & \text{se } l = nil \\ concat(rev(l'), cons(a, nil)), & \text{se } l = cons(a, l') \end{cases}$$

O uma lista é prefixo de outra se:

$$prefix(l_1, l_2) = \begin{cases} True, & \text{se } l_1 = nil \\ prefix(l_1', l_2'), & \text{se } l_1 = cons(a, l_1') \text{ e } l_2 = cons(a, l_2') \\ False & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Prove que $length(concat(l_1, l_2)) = length(l_1) + length(l_2)$, para l_1, l_2 quaisquer.

(b) Prove que $concat(l, nil) = l$ para qualquer lista l

(c) Prove que $concat(concat(l_1, l_2), l_3) = concat(l_1, concat(l_2, l_3))$ para listas l_1, l_2, l_3 quaisquer

(d) Prove que $length(rev(l)) = length(l)$, para qualquer lista l.

(e) Prove que $rev(concat(l_1, l_2)) = concat(rev(l_2), rev(l_1))$ para listas l_1, l_2 quaisquer.

(f) Prove que $rev(rev(l)) = l$ para qualquer lista l.

(g) Prove que $prefix(l_1, l_2)$ se e só se existe l_3 tal que $concat(l_1, l_3) = l_2$ para quaisquer l_1 e l_2.

2. Nos seguintes exercícios use a prova por indução na estrutura das fórmulas.

   (a) Demonstre que uma fórmula bem formada é balanceada, no sentido de que o número de parênteses abertos “(”é igual ao de parênteses fechados “)”, isto é, $|\varphi|_(= |\varphi|_)$, para uma fórmula φ qualquer.

   (b) Demonstre que para todo prefixo s de uma fórmula bem formada φ, vale $|s|_(\geq |s|_)$.

   (c) Demonstre que a palavra vazia não é uma fórmula.

   (d) Demonstre que uma fórmula bem formada não tem prefixos próprios que são também fórmulas: Se φ é uma fórmula bem formada e s é prefixo próprio de φ então s não pode ser uma fórmula bem formada.

3. “Toda fórmula satisfatível é tautológica.” Esta afirmação está correta? Justifique.

4. Construa a tabela de verdade e verifique se as fórmulas a seguir são tautologias, contradições ou contingências. Adicionalmente classifique-as como satisfatíveis ou insatisfatíveis:

   (a) $\psi \to (\phi \to (\phi \to (\psi \to \phi)))$

   (b) $(\phi \to \psi) \to ((\delta \to \gamma) \to (\phi \wedge \delta \to \psi \wedge \gamma))$

   (c) $\phi \to \neg\phi$

   (d) $(\phi \wedge \psi) \to (\psi \vee \phi)$

   (e) $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \to \delta)) \wedge (\neg\phi \vee \delta)$

5. Mostre que $\neg\phi \to \neg\psi$ é consequência lógica de $\psi \to \phi$, e vice-versa.

6. A árvore de dedução abaixo está correta? Justifique e corrija caso a dedução esteja errada. (Lembre-se que “$a \leftrightarrow b$” abrevia “$(a \to b) \wedge (b \to a)$”.)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi]^x \qquad [\neg\phi \to \psi]^y}{\neg\phi}\;(\to_e)}{((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \to \neg\phi}\;(\to_i)\ x \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^z}{(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi}\;(\to_i)\ y}{\neg\phi \to ((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi)}\;(\to_i)\ z}{((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi}\;(\wedge_i)
$$

7. Prove os sequentes a seguir utilizando apenas a lógica proposicional minimal:
   (a) $\neg\neg\neg\phi \dashv\vdash \neg\phi$.
   (b) $\neg\neg(\phi \to \psi) \vdash (\neg\neg\phi) \to (\neg\neg\psi)$.
   (c) $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi$.
   (d) $\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$.
   (e) $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \dashv\vdash \phi \wedge (\psi \wedge \varphi)$.
   (f) $(\phi \vee \psi) \vee \varphi \dashv\vdash \phi \vee (\psi \vee \varphi)$.
   (g) $\phi \to \psi \vdash \delta \vee \phi \to \delta \vee \psi$
   (h) $(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi) \dashv\vdash \delta \wedge (\phi \vee \psi)$ (Distributividade)

   Questões e itens "7g"e "7h"foram baseadas nos itens "b" e "e"da primeira questão em: http://wiki.di.uminho.pt/twiki/pub/Education/MFES/VF/exerciciosCoq.pdf

8. Prove o sequente a seguir utilizando apenas a lógica proposicional intuicionista:
   (a) $(\neg\neg\phi) \to (\neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\phi \to \psi)$.

9. A lógica clássica é obtida acrescentando-se qualquer uma das seguintes regras à lógica proposicional intuicionista:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\phi}\;(\text{PBC})\ u \qquad\qquad \dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\;(\text{LEM})
$$

$$
\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\;(\neg\neg_e) \qquad\qquad \dfrac{}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\;(\text{LP})
$$

   A quarta regra (LP) é denominada Lei de Peirce. Demonstre que quaisquer três destas regras pode ser provada a partir da quarta regra restante e as regras da lógica intuicionista, ou seja:

   (a) Adicione a regra (PBC) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove os sequentes correspondentes à lei do terceiro excluído e à eliminação da dupla negação:

i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

(b) Adicione a regra ($\neg\neg_e$) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

ii. $\neg\phi \rightarrow \bot \vdash \phi$

iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

(c) Adicione a regra (LEM) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \rightarrow \bot \vdash \phi$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

(d) Adicione a regra (LP) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \rightarrow \bot \vdash \phi$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

iii. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

10. Construa provas para todas as variantes das regras (MT) e (CP) e indique quais derivações são da lógica clássica e quais da lógica intuicionista proposicional:

$$\frac{\pm\phi \rightarrow \pm\psi \qquad \mp\psi}{\mp\phi}\ (\mathrm{MT}_{1\text{ e }2}) \qquad\qquad \frac{\pm/\pm\phi \rightarrow \pm/\mp\psi}{\mp/\pm\psi \rightarrow \mp/\mp\phi}\ (\mathrm{CP}_{1,2,3\text{ e }4})$$

11. Construa deduções para provar os sequentes a seguir e e indique se foi utilizada a lógica minimal, intuicionista ou clássica:

(a) $\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

(b) $\phi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$.

(c) $\varphi \rightarrow \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$

(d) $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$

(e) $\varphi \vee \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \rightarrow \psi$

12. Prove os sequentes a seguir utilizando o Cálculo de Gentzen e indique se foi utilizada a lógica intuicionista ou clássica:

(a) $\phi \wedge \psi \vdash \phi$.

(b) $\neg(\phi \vee \psi) \vdash (\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

(c) $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi$.

(d) $\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$.

(e) $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\delta \rightarrow \psi) \vdash (\phi \wedge \delta) \rightarrow \psi$.

(f) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$.

(g) $\vdash (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

(h) $\vdash (\neg\neg\phi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\phi \rightarrow \psi)$.

(i) $(\phi \wedge (\psi \vee \delta)) \vdash ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \delta))$.

(j) $p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$

(k) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \vdash p \vee q$

13. Apresente provas minimais ou intuicionistas para os sequentes:

    (a) $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$;

    (b) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)$;

    (c) $\vdash \neg\neg(((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$.

14. Prove o teorema de Glivenko: Sejam Γ um conjunto finito de fórmulas, e φ uma fórmula qualquer da lógica proposicional. Prove que se φ tem uma prova clássica a partir de Γ então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ, ou seja, se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$

15. Conjuntos Completos de Conectivos: Seja φ uma fórmula da lógica proposicional.

    (a) Prove, sem utilizar tabela de verdade, que existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.

    (b) Prove, sem utilizar tabela de verdade, que existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\rightarrow$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.